第 2 节 三大统一思想：角度、名称、次数（★★★）

内容提要

解决求值、求角、化简等问题的三大核心思想：角度统一、名称统一、次数统一，在具体的问题中，它们都是值得尝试的方向，把握好这三个统一，可以解决一系列问题.

1．角度统一：包括二倍角与单倍角之间的统一；要求的角与已知的角之间的统一；题干中涉及多个角，向某一个或几个角统一等.

2．名称统一：问题中涉及正弦、余弦、正切多个函数名的，若能将函数名统一起来，往往有利于分析问题. 例如正弦、余弦的齐次分式，可统一化为正切计算.

3．次数统一：三角代数式中各项次数不统一的，可尝试利用降次公式或升次公式将次数统一.

典型例题

类型Ⅰ：角度统一

【例 1】（2020·新课标Ⅰ卷）已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，则 $\sin\alpha=$（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　（B）$\dfrac{2}{3}$　（C）$\dfrac{1}{3}$　（D）$\dfrac{\sqrt{5}}{9}$

解析：所给等式中既有 2α，又有 α，结合要求的是 $\sin\alpha$，所以把二倍角向单倍角统一，

因为 $3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，所以 $3(2\cos^2\alpha-1)-8\cos\alpha=5$，解得：$\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$ 或 2（舍），

又 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\sin\alpha>0$，故 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

答案：A

【变式 1】已知 $\alpha\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6})$，且 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{3}{5}$，则 $\cos\alpha=$_____.

解析：将求值的角 α 统一成已知的角 $\alpha+\dfrac{\pi}{6}$，设 $t=\alpha+\dfrac{\pi}{6}$，则 $\alpha=t-\dfrac{\pi}{6}$，且 $\sin t=\dfrac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\cos(t-\dfrac{\pi}{6})=\cos t\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin t\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\dfrac{1}{2}\sin t$　①，

接下来由 $\sin t$ 求 $\cos t$，得先求出 t 的范围，才能确定 $\cos t$ 的正负，

因为 $\alpha\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6})$，所以 $t=\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，从而 $\cos t<0$，故 $\cos t=-\sqrt{1-\sin^2 t}=-\dfrac{4}{5}$，

代入式①可得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(-\dfrac{4}{5})+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

答案：$\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$

【变式 2】已知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\beta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos\alpha=$_____.

解析：将求值角统一成已知角，为便于观察，将$\alpha+\beta$换元，设$\alpha+\beta=\gamma$，则$\alpha=\gamma-\beta$，$\sin\gamma=-\frac{3}{5}$，

所以$\cos\alpha=\cos(\gamma-\beta)=\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta=\cos\gamma\cos\beta+(-\frac{3}{5})\times\frac{1}{3}=\cos\gamma\cos\beta-\frac{1}{5}$ ①，

接下来求$\cos\gamma$和$\cos\beta$，需先分析γ的范围，因为$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以$\frac{\pi}{2}<\gamma=\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，

故$\cos\gamma=-\sqrt{1-\sin^2\gamma}=-\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，代入式①得：$\cos\alpha=-\frac{4}{5}\times(-\frac{2\sqrt{2}}{3})-\frac{1}{5}=\frac{8\sqrt{2}-3}{15}$.

答案：$\frac{8\sqrt{2}-3}{15}$

【变式 3】已知$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan2\beta=\frac{1}{2}$，则$\cos(\frac{\alpha}{2}-\beta)=$（　　）

（A）$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（B）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　（C）$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　（D）$\frac{\sqrt{10}}{10}$

解析：给值求值，可将要求值的角向已知角统一，为了简化已知角，将2β换元，

令$\gamma=2\beta$，则$\beta=\frac{\gamma}{2}$，且$\tan\gamma=\frac{1}{2}$，$\cos(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$，

这样问题就转化成已知$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \tan\gamma=\frac{1}{2}\end{cases}$，求$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$，可先计算$\cos(\alpha-\gamma)$，再用倍角公式计算$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$，

因为$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，且$\gamma\in(0,\pi)$，结合$\tan\gamma=\frac{1}{2}>0$可得$\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$，

所以$\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\gamma=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故$\cos(\alpha-\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$，

又$\cos(\alpha-\gamma)=2\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{2}-1$，所以$2\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{2}-1=\frac{4}{5}$，故$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

该舍掉哪个答案，得研究$\frac{\alpha-\gamma}{2}$的范围才能确定，

因为$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\frac{\alpha-\gamma}{2}\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$，从而$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}>0$，故$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

答案：C

【反思】变式 1，2，3 都是给值求值问题，这类题常将要求值的角统一成已知的角，解析中都用了换元法，若能观察出题目中角的关系，也可直接凑，无需换元；另外，角度的限定与取舍思路值得深思.

【变式 4】$\frac{2\sin43^{\circ}-\sqrt{3}\sin13^{\circ}}{\cos13^{\circ}}=$_____.

解析：式子中有43°和13°，注意到$43^{\circ}=30^{\circ}+13^{\circ}$，所以可用此式代换$43^{\circ}$，将角统一成$13^{\circ}$，

原式$=\dfrac{2\sin(30^\circ+13^\circ)-\sqrt{3}\sin 13^\circ}{\cos 13^\circ}=\dfrac{2(\frac{1}{2}\cos 13^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 13^\circ)-\sqrt{3}\sin 13^\circ}{\cos 13^\circ}=\dfrac{\cos 13^\circ}{\cos 13^\circ}=1$.

答案：1

【变式 5】$\sin(\theta+75^\circ)+\cos(\theta+45^\circ)-\sqrt{3}\cos(\theta+15^\circ)=$_____.

解析：式子中有$\theta+75^\circ$，$\theta+45^\circ$，$\theta+15^\circ$这三个角，随便统一成哪一个都可以求出该式的值，例如，我们可以统一成$\theta+15^\circ$，先将其换元，

令$\alpha=\theta+15^\circ$，则$\theta+75^\circ=\alpha+60^\circ$，$\theta+45^\circ=\alpha+30^\circ$，

所以原式$=\sin(\alpha+60^\circ)+\cos(\alpha+30^\circ)-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=\sin\alpha\cos 60^\circ+\cos\alpha\sin 60^\circ+\cos\alpha\cos 30^\circ-\sin\alpha\sin 30^\circ-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=0$.

答案：0

【反思】从变式 4 和变式 5 可以看出，具体角度求值，先考虑角度间的关系，能否化为统一.

类型Ⅱ：名称统一

【例 2】函数$f(x)=\sin^3 x+3\cos^2 x(-\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2})$的最大值为_____.

解析：$f(x)$的解析式中既有$\sin x$，又有$\cos x$，可将$\cos^2 x$换成$1-\sin^2 x$，从而统一函数名，

由题意，$f(x)=\sin^3 x+3\cos^2 x=\sin^3 x+3-3\sin^2 x$，接下来可将$\sin x$换元，化为三次函数研究最值，

令$t=\sin x$，因为$-\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，所以$t\in[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$，且$f(x)=t^3-3t^2+3$，

设$g(t)=t^3-3t^2+3(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le t\le 1)$，则$g'(t)=3t(t-2)$，

所以$g'(t)>0\Leftrightarrow-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le t<0$，$g'(t)<0\Leftrightarrow 0<t\le 1$，从而$g(t)$在$[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$上↗，在$(0,1]$上↘，

故$g(t)_{\max}=g(0)=3$，所以$f(x)$的最大值为 3.

答案：3

【反思】当条件或所求中既有正弦，又有余弦时，可考虑用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$来消去其中一个，将函数名统一为正弦或余弦，往往更易于处理.

【例 3】若$\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$，则（　　）

（A）$\tan(\alpha-\beta)=1$　（B）$\tan(\alpha-\beta)=-1$　（C）$\tan(\alpha+\beta)=1$　（D）$\tan(\alpha+\beta)=-1$

解析：选项都是正切，故将所给等式右侧的分式上下同除以$\cos\alpha$，将函数名统一为正切，

由题意，$\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}$，所以$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta=\tan\alpha-1$，

从而$1+\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha-\tan\beta$，故$\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1$，即$\tan(\alpha-\beta)=1$.

答案：A

【变式】$\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=$_____.

解析：为了统一函数名，可考虑切化弦或弦化切，由于弦化切不方便，故切化弦，

$\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=\dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}+4\sin 20^\circ=\dfrac{\sin 20^\circ+4\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$，

对于40°和20°，除开用过的二倍角，还能怎样联系？其实可通过$40^\circ=60^\circ-20^\circ$将角统一成$20^\circ$，

所以$\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=\dfrac{\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\sin 20^\circ+2\sin(60^\circ-20^\circ)}{\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{\sin 20^\circ+2(\sin 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 60^\circ\sin 20^\circ)}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\sin 20^\circ+2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\sin 20^\circ)}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$

【反思】①已知正切或者求正切时，往往会考虑弦化切，其它时候常切化弦，当然会有例外，所以可以两方面尝试；②数字角的联系可能是多方面的，例如40°与20°除了二倍关系外，还有$40^\circ+20^\circ=60^\circ$.

类型Ⅲ：次数统一

【例 4】函数$f(x)=\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x(x\in\mathbf{R})$的最大值为_____.

解析：从解析式来看，化简的方向有两个，要么对$\sin^2 x$降次，要么对$\sin 2x$升次，都能统一次数，若选后者，可化为$f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x$，不易求出最值，故对$\sin^2 x$降次，

由题意，$f(x)=\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{2}$，所以$f(x)_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

【变式 1】（2021•新高考Ⅰ卷）若$\tan\theta=-2$，则$\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　　）

（A）$-\dfrac{6}{5}$（B）$-\dfrac{2}{5}$（C）$\dfrac{2}{5}$（D）$\dfrac{6}{5}$

解析：看到$1+\sin 2\theta$这个结构，想到升次公式$1\pm\sin 2\theta=(\sin\theta\pm\cos\theta)^2$，

$\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)$，

此式可凑分母$\sin^2\theta+\cos^2\theta$统一分子分母次数，再同除以$\cos^2\theta$将函数名统一为正切，

$\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{\tan\theta(\tan\theta+1)}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{2}{5}$，所以 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{2}{5}$.

答案：C

【反思】涉及 $\sin^2 x$，$\cos^2 x$ 等二次式化简时可考虑降次，变为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，如例 4；化简时遇到 1 可考虑升次，可用 $1+\cos 2x=2\cos^2 x$，$1-\cos 2x=2\sin^2 x$，$1\pm\sin 2x=(\cos x\pm\sin x)^2$，$1=\sin^2 x+\cos^2 x$ 这些公式来升次. 具体用哪一个，结合题目的其它形式来看.

【变式 2】(2022 •新高考Ⅰ卷节选)记 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$，若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B.

解：（所给等式中有 $1+\cos 2B$，这是升次标志，为了让右侧分子分母角度统一，分子也用二倍角公式）

$\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\dfrac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，由题意，$\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$，所以 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

从而 $\cos A\cos B=\sin B+\sin A\sin B$，故 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\sin B$，所以 $\cos(A+B)=\sin B$，

又 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $A+B=\pi-C=\dfrac{\pi}{3}$，从而 $\sin B=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，因为 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $0<B<\dfrac{\pi}{3}$，故 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

类型Ⅳ：三大统一思想综合应用

【例 5】（2021・全国甲卷）若 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\tan 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，则 $\tan\alpha=$（ ）

（A）$\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ （B）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ （C）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ （D）$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

解析：有正切，先统一函数名，弦化切困难，故切化弦，因为 $\tan 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，所以 $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，

接下来为了统一角度，可对左边用倍角公式，其中 $\cos 2\alpha$ 该选哪个，方向性还不明确，可先化分子，

$\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}\Rightarrow\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，左右可约掉 $\cos\alpha$，先考虑 $\cos\alpha$ 是否可能为 0，

因为 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha>0$，故 $\dfrac{2\sin\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{1}{2-\sin\alpha}$，

此时发现应将 $\cos 2\alpha$ 化为 $1-2\sin^2\alpha$，从而统一函数名为正弦，

所以 $\dfrac{2\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{2-\sin\alpha}$，解得：$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

答案：A

【变式 1】已知 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为_____.

解析：要求 $f(x)$ 的最小值，先化简其解析式，我们发现分子有 $1+\cos 2x$ 这一升次特征式，

由题意，$f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}=\dfrac{2\cos^2 x+8\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$，

这个式子拆部分分式即可化正切，且恰好凑成积为定值，可用不等式 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ 来求最小值，

所以 $f(x)=\dfrac{2\cos^2 x+8\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{4\sin x}{\cos x}=\dfrac{1}{\tan x}+4\tan x$，

因为 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\tan x>0$，故 $f(x)=\dfrac{1}{\tan x}+4\tan x\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{\tan x}\cdot 4\tan x}=4$，

当且仅当 $\dfrac{1}{\tan x}=4\tan x$，即 $\tan x=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立，所以 $f(x)_{\min}=4$.

答案：4

【变式 2】已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，设 $a=\tan 2\theta$，$b=\dfrac{\cos 2\theta}{2(1-\sin 2\theta)}$，$c=\sin 2\theta$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

（A）$a>b>c$　　（B）$b>c>a$　　（C）$b>a>c$　　（D）$c>a>b$

解法 1：不妨先比较 a 和 b 的大小，可切化弦，作差变形比较，

$a-b=\tan 2\theta-\dfrac{\cos 2\theta}{2(1-\sin 2\theta)}=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}-\dfrac{\cos 2\theta}{2(1-\sin 2\theta)}=\dfrac{2(1-\sin 2\theta)\sin 2\theta-\cos^2 2\theta}{2(1-\sin 2\theta)\cos 2\theta}$，

因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，所以 $0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$，故上式分母为正，只需看分子的正负，

观察发现可将分子的 $\cos^2 2\theta$ 换成 $1-\sin^2 2\theta$，将函数名统一为正弦，

因为 $2(1-\sin 2\theta)\sin 2\theta-\cos^2 2\theta=2(1-\sin 2\theta)\sin 2\theta-(1-\sin^2 2\theta)=-(\sin 2\theta-1)^2<0$，所以 $a-b<0$，故 $b>a$，

显然 a，c 的结构简单，故再比较 a 和 c 的大小，还是切化弦，

因为 $a-c=\tan 2\theta-\sin 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}-\sin 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta(1-\cos 2\theta)}{\cos 2\theta}>0$，所以 $a>c$，故 $b>a>c$.

解法 2：a，b，c 中的 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$ 均可化为 $\tan\theta$，故先化 $\tan\theta$，统一函数名，再比较，

由题意，$a=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，$c=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$，

因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，所以 $0<\tan\theta<1$，从而 $0<1-\tan^2\theta<1+\tan^2\theta$，故 $a>c$，

对于 b，可以先将 $\sin 2\theta$ 和 $\cos 2\theta$ 表示成 $\tan\theta$，再化简，但我们观察到分母有 $1-\sin 2\theta$，分子有 $\cos 2\theta$，故升次后可快速化 $\tan\theta$，

$b=\dfrac{\cos 2\theta}{2(1-\sin 2\theta)}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2(\cos\theta-\sin\theta)^2}=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{2(\cos\theta-\sin\theta)^2}=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{2(\cos\theta-\sin\theta)}=\dfrac{1+\tan\theta}{2(1-\tan\theta)}$，

所以 $a-b=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}-\dfrac{1+\tan\theta}{2(1-\tan\theta)}=\dfrac{4\tan\theta-(1+\tan\theta)(1+\tan\theta)}{2(1-\tan^2\theta)}=-\dfrac{(1-\tan\theta)^2}{2(1-\tan^2\theta)}$，

因为 $0<\tan\theta<1$，所以 $a-b<0$，从而 $b>a$，故 $b>a>c$.

答案：C

【反思】弦化切、切化弦没有严格的使用场景区分，在具体的问题中，它们都是值得尝试的方向，有时两种方法都能成功地解决问题.

强化训练

类型Ⅰ：三大思想的应用

1．（2021·北京卷·★★）已知函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$，则该函数是（　　）

（A）奇函数，最大值为 2

（B）偶函数，最大值为 2

（C）奇函数，最大值为$\frac{9}{8}$

（D）偶函数，最大值为$\frac{9}{8}$

2．（2022·湖南模拟·★★）函数 $f(x)=\sin x\sin 2x-2\cos x$ 的最大值为_____.

3．（2022·兰州模拟·★★）已知 $\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{5})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin(\theta+\frac{\pi}{10})=$______.

4．（2022·台州期末·★★）若 $2\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{3})+\cos 2\alpha=1$，则 $\tan 2\alpha=$（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$-\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

5．（★★★）若 $\tan\frac{\theta}{2}=2$，则 $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=$______.

6．（2023·东北三省三校四模·★★★）已知锐角α，β满足$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\sin 2\beta}{1-\cos 2\beta}$，则$\tan(\alpha-\beta)$的值为（　　）

（A）1　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C）-1　（D）$-\sqrt{3}$

7．（2022·曲靖模拟·★★★）若$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且$(1+\cos 2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta$，则下列结论正确的是（　　）

（A）$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　（B）$\alpha+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$　（C）$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　（D）$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

8．（★★★）设$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则函数$y=\frac{2\sin^2 x+1}{\sin 2x}$的最小值为_____.

类型Ⅱ：给值求值问题中角度范围的限定

9．（2022·福州模拟·★★）已知$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，则$\sin\alpha=$_____.

10．（2022·北京模拟·★★）已知α，β均为锐角，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，则$\cos\beta=$_____.

11．（2022 •延边一模 •★★★）若 $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\alpha\in[\frac{\pi}{4},\pi]$，$\beta\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$，则 $\alpha+\beta=$（　　）

（A）$\frac{7\pi}{4}$　（B）$\frac{9\pi}{4}$　（C）$\frac{5\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$　（D）$\frac{5\pi}{4}$ 或 $\frac{9\pi}{4}$

12．（2022 • 郯城月考 • ★★★★）已知 α，β 为锐角，$\sin(\alpha+2\beta)=\frac{1}{5}$，$\cos\beta=\frac{1}{3}$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$（　　）

（A）$\frac{1+8\sqrt{3}}{15}$　（B）$\frac{1\pm 8\sqrt{3}}{15}$　（C）$\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{15}$　（D）$\frac{1-8\sqrt{3}}{15}$

类型III：具体角三角函数式化简求值

13．（2022 • 北京模拟 • ★★）$\frac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}=$______.

14．（2022 • 太原一模 • ★★）$\sin 20^\circ+\sin 40^\circ=$（　　）

（A）$\sin 50^\circ$　（B）$\sin 60^\circ$　（C）$\sin 70^\circ$　（D）$\sin 80^\circ$

15．（★★★）已知 $\sqrt{3}\tan 20^\circ+\lambda\cos 70^\circ=3$，则 λ 的值为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　（B）$2\sqrt{3}$　（C）$3\sqrt{3}$　（D）$4\sqrt{3}$

16．（2022 • 高唐模拟 • ★★★★）$\frac{1+\cos 20^\circ}{2\sin 20^\circ}-\sin 10^\circ(\frac{1}{\tan 5^\circ}-\tan 5^\circ)=$______.